احتمال مهندسی

فصل چهارم: متغیر تصادفی گسسته

سید مهدی سجادیه

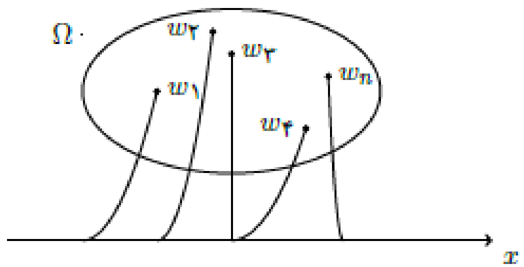
فهرست مطالب

- معرفی متغیر تصادفی
- مثال‌های مربوط
- تعاریف تابع احتمال، تابع توزیع تجمعی، امید ریاضی، واریانس و ...

متغیرهای تصادفی مهم

تعریف

- متغیر تصادفی:
  - تابعی که فضای نمونه را به اعداد حقیقی نگاشت می کند



- قرارداد
- متغیرهای تصادفی با حروف بزرگ نمایش داده می شود

- تابع احتمال:
- در متغیر تصادفی (گسسته)، به میزان احتمال در هر نقطه تابع احتمال گفته می شود
- نمایش با $P_X\{X=x\}$ که X متغیر تصادفی و x یک عدد حقیقی
- نکته مهم

$$\sum_{x:P_X\{X=x\}>0} P(X=x)=1$$

مثال

- آزمایشی را در نظر بگیرید که در آن ۳ سکه سالم را پرتاب می کنیم. اگر X (متغیر تصادفی) تعداد شیرهای ظاهر شده در نظر گرفته شود تابع احتمال این متغیر تصادفی را محاسبه کنید.
- حل:
- X: تعداد شیرها
- نکته چون تعداد سکه ها ۳ تا است پس تعداد تعداد شیرها بین ۰ تا ۳ خواهد بود

$$P\{X=0\}=P\{(T,T,T)\}=\frac{1}{8}$$

$$P\{X=1\}=P\{(T,T,H),(T,H,T),(H,T,T)\}=\frac{3}{8}$$

$$P\{X=2\}=P\{(T,H,H),(H,T,H),(H,H,T)\}=\frac{3}{8}$$

$$P\{X=3\}=P\{(H,H,H)\}=\frac{1}{8}$$

مثال

آزمایشی را در نظر بگیرید که در آن دو تاس سالم را می‌ریزیم. متغیر تصادفی X را مجموع برآمدها در نظر می‌گیریم. مشخص‌است که X می‌تواند مقادیری از ۲ تا ۱۲ داشته‌باشد؛ یعنی: $۲ \le X \le ۱۲$. تابع احتمال برای این آزمایش به‌صورت زیر است:

k	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$\Pr\{X = k\}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

در آزمایش قبل اگر X را ماکسیمم برآمد دو تاس در نظر بگیریم، تابع احتمال به‌صورت زیر است:

$$P\{X = 1\} = P\{(1,1)\} = \frac{1}{36}$$

$$P\{X = 2\} = P\{(1,2),(2,1),(2,2)\} = \frac{3}{36}$$

$$P\{X = 3\} = P\{(3,1),(1,3),(2,3),(3,2),(3,3)\} = \frac{5}{36}$$

$$\vdots$$

$$P\{X = 6\} = P\{(6,1),(1,6),(2,6),\ldots,(6,6)\} = \frac{11}{36}$$

مثال

- فرض کنید در کیسه ای ۲۰ توپ از شماره ۱ تا ۲۰ باشد. سه توپ از این کیسه بدون جایگذاری انتخاب می کنیم. اگر X ماکزیمم عدد بین سه توپ باشداحتمال آنکه X بیش از ۱۷ باشد را محاسبه کنید.
- حل:
- X: ماکزیمم بین سه توپ $X \in \{3,4,\ldots,20\}$

$$P\{X>17\}=P\{X=18\}+P\{X=19\}+P\{X=20\}$$

- برای محاسبه P{X=18} باید یکی از سه توپ برابر ۱۸ باشد و دو توپ دیگر از ۱۸ کمتر باشد

$$P\{X=18\}=\frac{\binom{1}{1}\binom{17}{2}}{\binom{20}{3}}$$

- برای X=19,20 هم داریم:

$$P\{X=19\}=\frac{\binom{1}{1}\binom{18}{2}}{\binom{20}{3}},P\{X=20\}=\frac{\binom{1}{1}\binom{19}{2}}{\binom{20}{3}}$$

مثال

- فرض کنید یک سکه را انقدر پرتاب می کنیم تا شیر بیاید و یا تعداد پرتاب برابر N شود. اگر X نشان دهنده تعداد پرتاب باشد و احتمال شیر آمدن سکه برابر p باشد آنگاه تابع احتمال متغیر تصادفی X را پیدا کنید.
- حل:
- X: مقادیر ۱و۲ و...و N خواهد بود:
- برای X بین ۱ تا N-1

$$P\{X=1\}=P\{(H)\}=p$$
$$P\{X=2\}=P\{(T,H)\}=(1-p)p$$
$$P\{X=3\}=P\{(T,T,H)\}=(1-p)^2 p$$
$$\vdots$$
$$P\{X=N-1\}=P\{(\underbrace{T,\dots,T}_{N-2},H)\}=(1-p)^{N-2}p$$

- برای X=N هم داریم:

$$P\{X=N\}=P\{(\underbrace{T,\dots,T}_{N-1},H),\underbrace{T,\dots,T}_{N-1},T)\}=(1-p)^{N-1}p+(1-p)^{N-1}(1-p)$$
$$=(1-p)^{N-1}$$

تابع توزیع تجمعی

- تابع احتمال: میزان احتمال در هر نقطه

- تابع توزیع تجمعی ($F_X(a)$): مجموع احتمال از منفی بینهایت تا نقطه **a** یا

$$F_X(a) = P\{X \leq a\} = \sum_{x \leq a} P(X = x)$$

- دقت کنید $F_X(a)$ یک تابع احتمال است پس مقدار آن بین صفر تا یک است.

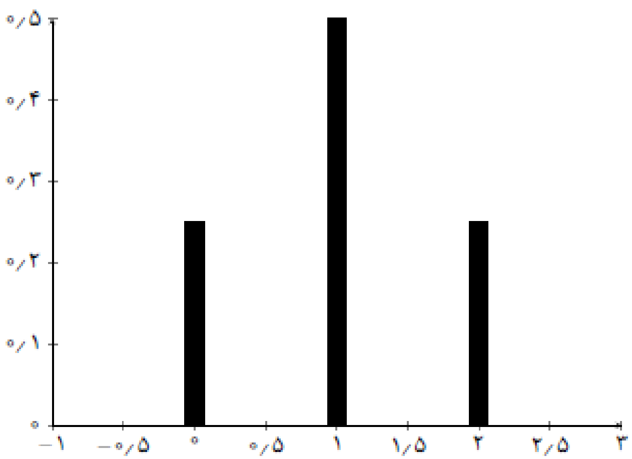
مثال

آزمایشی را در نظر بگیرید که در آن ۲ سکه‌ی سالم را پرتاب می‌کنیم. اگر در این آزمایش X را تعداد شیرهای رو آمده در نظر بگیریم، مقادیر X به‌ازای برآمدهای آزمایش و احتمال هر یک به صورت زیر خواهد بود:

$$\Pr\{X = ۰\} = \frac{۱}{۴}$$

$$\Pr\{X = ۱\} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Pr\{X = ۲\} = \frac{۱}{۴}$$



تابع احتمال

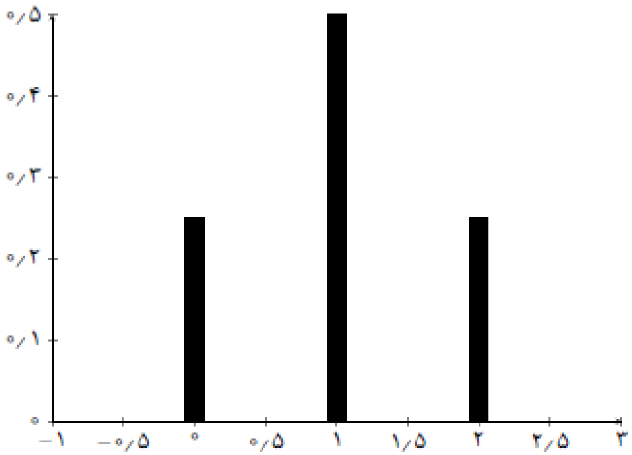
مثال

آزمایشی را در نظر بگیرید که در آن ۲ سکه‌ی سالم را پرتاب می‌کنیم. اگر در این آزمایش X را تعداد شیرهای رو آمده در نظر بگیریم، مقادیر X به‌ازای برآمدهای آزمایش و احتمال هر یک به صورت زیر خواهد بود:

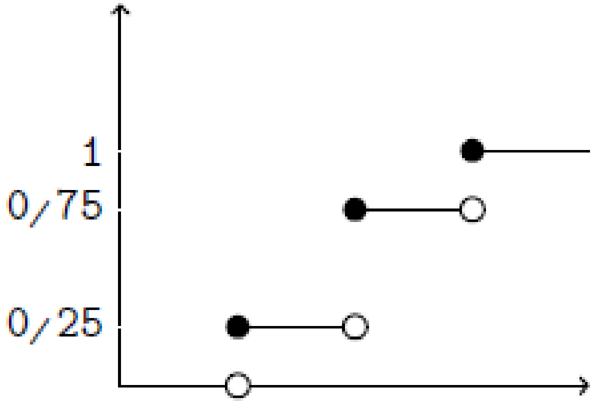
$$\Pr\{X = ۰\} = \frac{۱}{۴}$$

$$\Pr\{X = ۱\} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Pr\{X = ۲\} = \frac{۱}{۴}$$



تابع احتمال



تابع توزیع تجمعی

ویژگی های تابع توزیع تجمعی

- FX(a) یک تابع غیر نزولی است.
- از سمت راست پیوسته است
- حد در بینهایت و منفی بینهایت

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = ۱$$

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = ۰$$

ویژگی های تابع توزیع تجمعی

- **FX(a)** یک تابع غیر نزولی است.
- از سمت راست پیوسته است
- حد در بینهایت و منفی بینهایت

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = ۱$$

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = ۰$$

- با توجه به تعریف تابع توزیع تجمعی داریم: (a^-: حد سمت چپ عدد **a**)

$$\Pr\{X = a\} = F(a) - F(a^-)$$

$$\Pr\{X \leq a\} = F(a)$$

$$\Pr\{X > a\} = ۱ - F(a)$$

$$\Pr\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a)$$

$$\Pr\{X \geq a\} = ۱ - F(a^-)$$

$$\Pr\{a \leq X < b\} = F(b^-) - F(a^-)$$

$$\Pr\{a < X < b\} = F(b^-) - F(a)$$

ویژگی های تابع توزیع تجمعی

- **FX(a)** یک تابع غیر نزولی است.
- از سمت راست پیوسته است
- حد در بینهایت و منفی بینهایت

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = ۱$$

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = ۰$$

- با توجه به تعریف تابع توزیع تجمعی داریم: (a^-: حد سمت چپ عدد a)

$$\Pr\{X = a\} = F(a) - F(a^-)$$

$$\Pr\{X \leq a\} = F(a)$$

$$\Pr\{X > a\} = ۱ - F(a)$$

$$\Pr\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a)$$

$$\Pr\{X \geq a\} = ۱ - F(a^-)$$

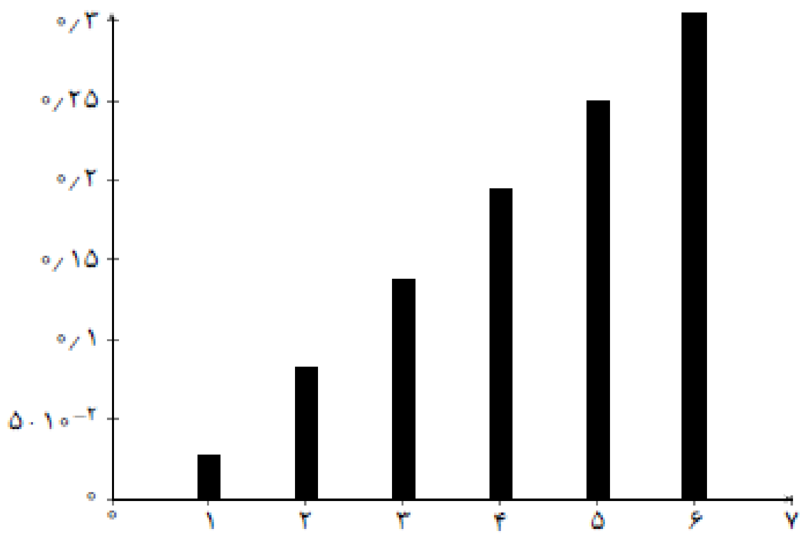
$$\Pr\{a \leq X < b\} = F(b^-) - F(a^-)$$

$$\Pr\{a < X < b\} = F(b^-) - F(a)$$

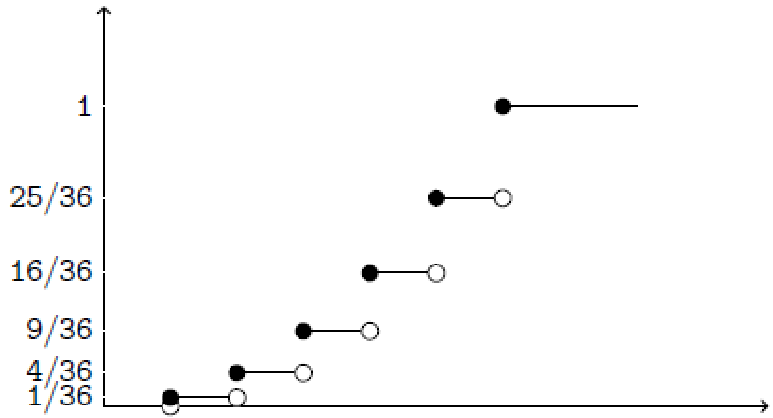
در نقاطی که احتمال غیر صفر است
پرش وجود دارد

مثال

- اگر در پرتاب دوتاس ماکزیمم دو مقدار پرتاب شده را در نظر بگیریم تابع احتمال و تابع توزیع تجمعی به صورت زیر خواهد بود



تابع احتمال



تابع توزیع تجمعی

مثال

- تابع احتمال یک متغیر تصادفی به صورت زیر است که α عدد مثبتی است.

$$P\{X=i\}=\frac{c\alpha^{i}}{i!}$$

الف) **c** را محاسبه کنید.

ب)**P{X>1}** را تعیین کنید.

مثال

- تابع احتمال یک متغیر تصادفی به صورت زیر است که α عدد مثبتی است.

$$P\{X=i\}=\frac{c\alpha^i}{i!}$$

الف) c را محاسبه کنید.

ب) $P\{X>1\}$ را تعیین کنید.

- حل:
- یادآوری

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{i!}=e^t$$

- الف) مجموع احتمالها باید یک باشد پس داریم:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c\alpha^i}{i!}=c\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\alpha^i}{i!}=ce^{\alpha}=1\Rightarrow c=\frac{1}{e^{\alpha}}=e^{-\alpha}$$

مثال

- تابع احتمال یک متغیر تصادفی به صورت زیر است که α عدد مثبتی است.

$$P\{X=i\}=\frac{c\alpha^{i}}{i!}$$

الف) c را محاسبه کنید.

ب) $P\{X>1\}$ را تعیین کنید.

- حل:
- یادآوری

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^{i}}{i!}=e^{t}$$

- الف) مجموع احتمالها باید یک باشد پس داریم:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c\alpha^{i}}{i!}=c\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\alpha^{i}}{i!}=ce^{\alpha}=1\Rightarrow c=\frac{1}{e^{\alpha}}=e^{-\alpha}$$

- ب)

$$P\{X>1\}=1-P\{X\leq 1\}=1-(P\{X=0\}+P\{X=1\})$$

$$=1-(\frac{e^{-\alpha}\alpha^{0}}{0!}+\frac{e^{-\alpha}\alpha^{1}}{0!})=1-e^{-\alpha}(\alpha+1)$$

مثال

- اگر تابع توزیع تجمعی به صورت زیر باشد تابع احتمال را به دست آورید.

$$F_X(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \dfrac{1}{2} & 0 \le b < 1 \\ \dfrac{3}{5} & 1 \le b < \dfrac{7}{3} \\ 1 & \dfrac{7}{3} \le b \end{cases}$$

مثال

- اگر تابع توزیع تجمعی به صورت زیر باشد تابع احتمال را به دست آورید.

$$F_X(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \le b < 1 \\ \frac{3}{5} & 1 \le b < \frac{7}{3} \\ 1 & \frac{7}{3} \le b \end{cases}$$

- حل: همان طور که بیان شد فقط در نقاط نا پیوستگی احتمال غیر صفر وجود داردکه سه نقطه نا پیوستگی در این تابع است:

$$P\{X = 0\} = P\{X = 0\} - P\{X = 0^-\} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$P\{X = 1\} = P\{X = 1\} - P\{X = 1^-\} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

$$P\{X = \frac{7}{3}\} = P\{X = \frac{7}{3}\} - P\{X = \frac{7}{3}^-\} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

مثال

- اگر تابع توزیع تجمعی به صورت زیر باشد:

$$F_X(b)=\begin{cases}0 & b<0\\ \dfrac{b}{4} & 0\le b<1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{b-1}{2} & 1\le b<2\\ 1 & 2\le b\end{cases}$$

- الف) $P\{X=i\}, i=0,1,2$ را محاسبه کنید. ب) $P\{0.5<X<1.6\}$ را محاسبه کنید.

مثال

- اگر تابع توزیع تجمعی به صورت زیر باشد:

$$F_X(b)=\begin{cases}0 & b<0\\ \dfrac{b}{4} & 0\le b<1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{b-1}{2} & 1\le b<2\\ 1 & 2\le b\end{cases}$$

- الف) P{X=i},i=0,1,2 را محاسبه کنید. ب) P{0.5<X<1.6} را محاسبه کنید.
- حل: الف)

$$P\{X=0\}=P\{X=0\}-P\{X=0^-\}=\frac{0}{4}-0=0$$

$$P\{X=1\}=P\{X=1\}-P\{X=1^-\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P\{X=2\}=P\{X=2\}-P\{X=2^-\}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

مثال

- اگر تابع توزیع تجمعی به صورت زیر باشد:

$$F_X(b)=\begin{cases}0 & b<0\\ \dfrac{b}{4} & 0\le b<1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{b-1}{2} & 1\le b<2\\ 1 & 2\le b\end{cases}$$

- الف) $P\{X=i\}, i=0,1,2$ را محاسبه کنید. ب) $P\{0.5<X<1.6\}$ را محاسبه کنید.
- حل: الف)

$$P\{X=0\}=P\{X=0\}-P\{X=0^-\}=\frac{0}{4}-0=0$$

$$P\{X=1\}=P\{X=1\}-P\{X=1^-\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P\{X=2\}=P\{X=2\}-P\{X=2^-\}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

- دقت کنید مجموع احتمال در این مثال برابر یک نیست چون پیوسته است و پله ای نیست.
- ب)

$$P\{0.5<X<1.6\}=P\{X=1.6^-\}-P\{X=0.5\}=\frac{1}{2}+\frac{1.6-1}{4}-\frac{0.5}{4}=\frac{21}{40}$$

امیدریاضی

- اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال P{X=x} باشد در این صورت امید ریاضی که با E[X] نمایش داده می شود به صورت زیر تعریف می شود:

$$E[X] = \sum_{x:p(x)>0} xp(x).$$

امیدریاضی

- اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $P\{X=x\}$ باشد در این صورت امید ریاضی که با $E[X]$ نمایش داده می شود به صورت زیر تعریف می شود:

$$E[X] = \sum_{x:p(x)>0} xp(x).$$

- به عبارت دیگر $E[X]$ که برخی زمانها با μ هم نمایش داده می شود میانگین وزنی از مقادیر ممکن برای متغیر تصادفی است.
- اگر یک آزمایش به تعداد زیادی انجام پذیرد انتظار داریم که میانگین نتایج امید ریاضی باشد.

امیدریاضی

- اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال P{X=x} باشد در این صورت امید ریاضی که با E[X] نمایش داده می شود به صورت زیر تعریف می شود:

$$E[X] = \sum_{x:p(x)>0} xp(x).$$

- به عبارت دیگر E[X] که برخی زمانها با μ هم نمایش داده می شود میانگین وزنی از مقادیر ممکن برای متغیر تصادفی است.
- اگر یک آزمایش به تعداد زیادی انجام پذیرد انتظار داریم که میانگین نتایج امید ریاضی باشد.
- امید ریاضی همانند مرکز ثقل در جسم است.
- امید ریاضی یک عدد ثابت است.

هر عدد ثابت یک متغیر تصادفی است با احتمال یک و مقدار متوسط آن برابر مقدار همان عدد ثابت است.

$$\mathrm{E}[\alpha] = \alpha$$

امید ریاضی

- مثال متغیر تصادفی نشانه برای پیشامد **A** به صورت زیر تعریف می شود:
- **I=1** اگر پیشامد **A** انفاق بیفتد
- **I=0** اگر پیشامد **A** انفاق نیفتد
- اگر احتمال پیشامد **A** برابر **P(A)** باشد **E[I]** را محاسبه کنید.

- حل

$$E\{I\} = 0 * P\{I = 0\} + 1 * P\{I = 1\} = 0 * (1 - p(A)) + 1 * p(A) = p(A)$$

- .

امید ریاضی

- مثال متغیر تصادفی نشانه برای پیشامد A به صورت زیر تعریف می شود:
- I=1 اگر پیشامد A اتفاق بیفتد
- I=0 اگر پیشامد A اتفاق نیفتد
- اگر احتمال پیشامد A برابر P(A) باشد E[I] را محاسبه کنید.

- حل

$$E\{I\}=0*P\{I=0\}+1*P\{I=1\}=0*(1-p(A))+1*p(A)=p(A)$$

- مثال: برای یک تاس با احتمال هم شانس، امید ریاضی را محاسبه کنید.
- حل

$$P\{X=i\}=\frac{1}{6},\quad i=1,2,\ldots,6$$

$$E\{X\}=\sum_{i=1}^{6} i*P\{X=i\}=\sum_{i=1}^{6} i*\frac{1}{6}=\frac{1}{6}(1+2+\ldots+6)=\frac{7}{2}$$

مثال

- در پرتاب دو سکه، اگر X تعداد شیرها باشد، $E[X]$ چیست؟

مثال

- در پرتاب دو سکه، اگر X تعداد شیرها باشد، E [X] چیست؟
- حل : {(H;H); (H;T); (T;H); (T;T)}

بنابراین

$$\left.\begin{array}{l} P\{X=0\}=P\{(T,T)\}=\dfrac{1}{4} \\ P\{X=1\}=P\{(T,H),(H,T)\}=\dfrac{2}{4} \\ P\{X=2\}=P\{(H,H)\}=\dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow E[X]=0*\frac{1}{4}+1*\frac{2}{4}+2*\frac{1}{4}=1$$

مثال

- به یک شرکت کننده در مسابقه ای دو سوال داده می شود و وی می تواند به ترتیب دلخواه یکی از سوالات را انتخاب کند و ر صورتی می تواند سوال دوم را جواب دهد که پاسخ سوال اول را داده باشد. اگر او برای پاسخ صحیح به سوال iام، vi ریال جایزه دریافت کند. اگر بداند پاسخ صحیح به سوال iام را با حتمال pi می داند به چه ترتیبی سوال ها را جواب دهد تا امیدریاضی جایزه او ماکزیمم شود؟

مثال

- به یک شرکت کننده در مسابقه ای دو سوال داده می شود و وی می تواند به ترتیب دلخواه یکی از سوالات را انتخاب کند و ر صورتی می تواند سوال دوم را جواب دهد که پاسخ سوال اول را داده باشد. اگر او برای پاسخ صحیح به سوال iام، vi ریال جایزه دریافت کند. اگر بداند پاسخ صحیح به سوال iام را با احتمال pi می داند به چه ترتیبی سوال ها را جواب دهد تا امیدریاضی جایزه او ماکزیمم شود؟
- حل:
- اگر سوال اول را انتخاب کند X مقدار جایزه وی باشد در این صورت وی در صورت جواب ندادن سوال اول بدون جایزه است. در صورتی که سوال اول را جواب دهد و سوال دوم را نتواند جواب دهد v1 می برد و در صورت جواب هر دو سوال مقدار v1+v2 خواهد برد.

مثال

- به یک شرکت کننده در مسابقه ای دو سوال داده می شود و وی می تواند به ترتیب دلخواه یکی از سوالات را انتخاب کند و ر صورتی می تواند سوال دوم را جواب دهد که پاسخ سوال اول را داده باشد. اگر او برای پاسخ صحیح به سوال **i**ام، **vi** ریال جایزه دریافت کند. اگر بداند پاسخ صحیح به سوال **i**ام را با حتمال **pi** می داند به چه ترتیبی سوال ها را جواب دهد تا امیدریاضی جایزه او ماکزیمم شود؟
- حل:
- اگر سوال اول را انتخاب کند X مقدار جایزه وی باشد در این صورت وی در صورت جواب ندادن سوال اول بدون جایزه است. در صورتی که سوال اول را جواب دهد و سوال دوم را نتواند جواب دهد **v1** می برد و در صورت جواب هر دو سوال مقدار **v1+v2** خواهد برد.

$$\left.\begin{array}{l} P\{X=0\}=1-p1 \\ P\{X=v1\}=p1(1-p2) \\ P\{X=v1+v2\}=p1p2 \end{array}\right\} \Rightarrow E_1[X]=0*(1-p1)+v1*p1(1-p2)+(v1+v2)*p1p2$$

$$E_1[X]=v1p1+v2p1p2$$

ادامه مثال

- اگر سوال دوم را انتخاب کند ,X مقدار جایزه وی باشد در این صورت وی در صورت جواب ندادن سوال دوم بدون جایزه است. در صورتی که سوال دوم را جواب دهد و سوال اول را نتواند جواب دهد v2 می برد و در صورت جواب هر دو سوال مقدار v1+v2 خواهد برد.

$$\left.\begin{array}{l} P\{X=0\}=1-p2 \\ P\{X=v2\}=p2(1-p1) \\ P\{X=v1+v2\}=p1p2 \end{array}\right\} \Rightarrow E_2[X]=0*(1-p1)+v2*p2(1-p1)+(v1+v2)*p1p2$$

$$E_2[X]=v2p2+v1p1p2$$

- در این صورت E1 و E2 با هم مقایسه می شود

ادامه مثال

- اگر سوال دوم را انتخاب کند X, مقدار جایزه وی باشد در این صورت وی در صورت جواب ندادن سوال دوم بدون جایزه است. در صورتی که سوال دوم را جواب دهد و سوال اول را نتواند جواب دهد **v2** می برد و در صورت جواب هر دو سوال مقدار **v1+v2** خواهد برد.

$$\left.\begin{aligned} P\{X=0\} &= 1-p2 \\ P\{X=v2\} &= p2(1-p1) \\ P\{X=v1+v2\} &= p1p2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_2[X]=0*(1-p1)+v2*p2(1-p1)+(v1+v2)*p1p2$$

$$E_2[X]=v2p2+v1p1p2$$

- در این صورت **E1** و **E2** با هم مقایسه می شود

$$E_2[X]=v2p2+v1p1p2 \overset{?}{\leq} E_1[X]=v1p1+v2p1p2$$

$$\Rightarrow v2p2(1-p1) \overset{?}{\leq} v1p1(1-p2) \Rightarrow \frac{v2p2}{(1-p2)} \overset{?}{\leq} \frac{v1p1}{(1-p1)}$$

- اگر **p1=0** باشد حتما سوال دوم انتخاب می شود(و بالعکس)
- اگر **p1=1** باشد حتما سوال اول انتخاب می شود(و بالعکس)
- اگر **p1=0.1** و **v1=100** و **p2=0.3** و **v2=50** در این صورت ابتدا سوال دوم انتخاب می شود.
- اگر **p1=0.1** و **v1=1000** و **p2=0.3** و **v2=50** در این صورت ابتدا سوال دوم انتخاب می شود.

مثال

- ۱۲۰ دانش آموز در یک مدرسه برای شرکت در یک اردو به ۳ دسته تقسیم می شوند که دسته اول ۳۰ نفر، دسته دوم ۴۰ نفر و دسته سوم دارای ۵۰ نفر هستند. از این دان آموزان یک دانش آموز به تصادف انتخاب می کنیم اگر X نشان دهنده تعداد اعضای دسته این دانش آموز باشد $E[X]$ را محاسبه کنید.

مثال

- ۱۲۰ دانش آموز در یک مدرسه برای شرکت در یک اردو به ۳ دسته تقسیم می شوند که دسته اول ۳۰ نفر، دسته دوم ۴۰ نفر و دسته سوم دارای ۵۰ نفر هستند. از این دان آموزان یک دانش آموز به تصادف انتخاب می کنیم اگر Xنشان دهنده تعداد اعضای دسته این دانش آموز باشد E[X] را محاسبه کنید.
- حل:
- X سه مقدار ۳۰، ۴۰ و ۵۰ را انتخاب خواهد کرد.

$$\left.\begin{array}{l} P\{X=30\}=\dfrac{30}{120} \\ P\{X=40\}=\dfrac{40}{120} \\ P\{X=50\}=\dfrac{50}{120} \end{array}\right\} \Rightarrow E[X]=30*\frac{30}{120}+40*\frac{40}{120}+50*\frac{50}{120}=\frac{5000}{120}=41.33$$

چند ویژگی امید ریاضی

- اگر g یک تابع باشد در این صورت

$$E[g(X)] = \sum_{x:p(x)>0} g(x)p(x).$$

- **مثال**: فرض کنید X یک متغیر تصادفی است که مقادیر ۱–، ۰ و ۱ را با احتمالهای ۰,۲، ۰,۳ و ۰,۵ انتخاب می کند. $E[X^2]$ را محاسبه کنید.

چند ویژگی امید ریاضی

- اگر g یک تابع باشد در این صورت

$$E[g(X)] = \sum_{x:p(x)>0} g(x)p(x).$$

- مثال: فرض کنید X یک متغیر تصادفی است که مقادیر ۱–، ۰ و ۱ را با احتمالهای ۰٫۲، ۰٫۳ و ۰٫۵ انتخاب می کند. $E[X^2]$ را محاسبه کنید.
- حل: راه حل اول

$$\left.\begin{array}{l} P\{X=-1\}=0.2 \\ P\{X=0\}=0.3 \\ P\{X=1\}=0.5 \end{array}\right\} \Rightarrow E[X^2]=(-1)^2*0.2+(0)^2*0.3+(1)^2*0.5=0.7$$

چند ویژگی امید ریاضی

- اگر g یک تابع باشد در این صورت

$$E[g(X)] = \sum_{x:p(x)>0} g(x)p(x).$$

- **مثال**: فرض کنید X یک متغیر تصادفی است که مقادیر ۱–، ۰ و ۱ را با احتمالهای ۰٫۲، ۰٫۳ و ۰٫۵ انتخاب می کند. $E[X^2]$ را محاسبه کنید.

- حل: راه حل اول

$$\left.\begin{aligned} P\{X=-1\}&=0.2\\ P\{X=0\}&=0.3\\ P\{X=1\}&=0.5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow E[X^2]=(-1)^2*0.2+(0)^2*0.3+(1)^2*0.5=0.7$$

- راه حل دوم: با تغییر متغیر $Y=X^2$، در این صورت Y تنها می تواند ۰ و ۱ باشد

$$\left.\begin{aligned} &P\{Y=0\}=P\{X=0\}=0.3\\ &P\{Y=1\}=P\{X^2=1\}=P\{X=1 \ or \ X=-1\}=\\ &\qquad =P\{X=1\}+P\{X=-1\}=0.7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow E[Y]=0*0.3+1*0.7=0.7$$

چند ویژگی امید ریاضی

- ویژگی خطی امید ریاضی

$$E[aX+b]=aE[X]+b$$

- در حالت کلی

E[X1 + X2 + …+ Xn] = E[X1] + E[X2] + …+ E[Xn]

- **مثال**: در پرتاب اگر به اندازه ۳ برابر حاصل منهای ۵ جایزه دریافت کنیم به طور متوسط چقدر جایزه دریافت می کنیم.
- حل: اگر X نشان دهنده نتیجه تاس باشد در این صورت Y=3X-5

$$E[X]=3.5 \Rightarrow E[Y]=3*E[X]-5=5.5$$

واریانس

- امید ریاضی یک کمیت کامل نیست زیرا دو متغیر تصادفی X و Y زیر دارای یک امید ریاضی هستند:

$$X=\begin{cases}100 & p=\dfrac{1}{2}\\ -100 & p=\dfrac{1}{2}\end{cases},\quad Y=\begin{cases}100000 & p=\dfrac{1}{2}\\ -100000 & p=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

واریانس

- امید ریاضی یک کمیت کامل نیست زیرا دو متغیر تصادفی **X** و **Y** زیر دارای یک امید ریاضی هستند:

$$X=\begin{cases}100 & p=\dfrac{1}{2}\\ -100 & p=\dfrac{1}{2}\end{cases},\quad Y=\begin{cases}100000 & p=\dfrac{1}{2}\\ -100000 & p=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

- واریانش پراکندگی داده ها حول میانگین را واریانس گویند (باید تابع مورد استفاده زوج و صعودی باشد) .

$$Var[X]=E[(X-E[X])^2]=E[(X-\mu)^2]=$$

$$=E[X^2-2\mu X+\mu^2]=E[X^2]-\underbrace{2\mu E[X]}_{2\mu^2}+\mu^2=$$

$$=E[X^2]-\mu^2=E[X^2]-(E[X])^2$$

مثال

- در پرتاب یک تاس اگر X نشان دهنده نتیجه پرتاب تاس باشد واریانس X را محاسبه کنید.
- حل:

مثال

- در پرتاب یک تاس اگر **X** نشان دهنده نتیجه پرتاب تاس باشد واریانس **X** را محاسبه کنید.
- حل:

$$p\{X=i\}=\frac{1}{6}, i=1,2,\ldots,6$$

$$E[X]=3.5$$

$$E[X^2]=\sum_{i=1}^{6} i^2 * \frac{1}{6}=\frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36)=\frac{91}{6}$$

$$Var(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12}$$

- چند رابطه مهم ریاضی در محاسبات

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

ویژگی های واریانس

- مثال

Recall $P\{Y = 0\} = 1/4$ and $P\{Y = 1\} = 1/2$ and $P\{Y = 2\} = 1/4$.

Then $\mathrm{Var}[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{1}{4}0^2 + \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{4}2^2 - 1^2 = \frac{1}{2}$.

- چند ویژگی مهم ورایانس
- واریانس عدد ثابت a
- واریانس همیشه مثبت است

$$E[a] = a, Var(a) = 0$$

ویژگی های واریانس

- مثال

Recall $P\{Y=0\}=1/4$ and $P\{Y=1\}=1/2$ and $P\{Y=2\}=1/4$.

Then $\mathrm{Var}[Y]=E[Y^2]-E[Y]^2=\frac{1}{4}0^2+\frac{1}{2}1^2+\frac{1}{4}2^2-1^2=\frac{1}{2}$.

- چند ویژگی مهم ورایانس
- واریانس عدد ثابت a

$$E[a]=a, Var(a)=0$$

- واریانس همیشه مثبت است
- واریانس ترکیب خطی

$$E[aX+b]=aE[X]+b, Var(aX+b)=a^2\,\mathrm{var}(X)$$

- انحراف از معیار

$$SD(X)=\sigma_X=\sqrt{Var(X)}$$

متغیر تصادفی نرمال شده

متغیر تصادفی نرمال شده X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X^* = \frac{X - \mathrm{E}[X]}{\sigma_X}$$

۱. ویژگی اول متغیر تصادفی نرمال شده:

$$\mathrm{E}[X^*] = ۰$$

$$E[X^*] = E(\frac{۱}{\sigma_X}X - \frac{E[X]}{\sigma_X}) = (\frac{E[X]}{\sigma_X}) - (\frac{E[X]}{\sigma_X}) = ۰$$

۲. ویژگی دوم متغیر تصادفی نرمال شده:

$$\mathrm{Var}(X^*) = ۱$$

$$\mathrm{Var}[X^*] = \mathrm{Var}(\frac{۱}{\sigma_X}X - \frac{\mathrm{E}[X]}{\sigma_X}) = \frac{۱}{\sigma_X^۲}\mathrm{Var}(X) = \frac{\sigma_X^۲}{\sigma_X^۲} = ۱$$

تابع گشتاور و مولد گشتاور

- گشتاور مرتبه kام متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می شود:

$$E[X^k] = \sum_{x:P_X(x)>0} x^k P_X(X = x)$$

  - گشتاور مرتبه اول همان امید ریاضی
  - گشتاور مرتبه دوم و اول برای محاسبه واریانس

تابع گشتاور و مولد گشتاور

- گشتاور مرتبه kام متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می شود:

$$E[X^k] = \sum_{x:P_X(x)>0} x^k P_X(X = x)$$

  - گشتاور مرتبه اول همان امید ریاضی
  - گشتاور مرتبه دوم و اول برای محاسبه واریانس

- تابع مولد گشتاور

$$E[e^{tX}] = \sum_{x:P_X(x)>0} e^{tx} P_X(X = x)$$

تابع گشتاور و مولد گشتاور

- گشتاور مرتبه kام متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می شود:

$$E[X^k] = \sum_{x:P_X(x)>0} x^k P_X(X=x)$$

  - گشتاور مرتبه اول همان امید ریاضی
  - گشتاور مرتبه دوم و اول برای محاسبه واریانس

- تابع مولد گشتاور

$$E[e^{tX}] = \sum_{x:P_X(x)>0} e^{tx} P_X(X=x)$$

- محاسبه گشتاور مرتبه k ام از تابع مولد گشتاور:

$$E[X^k] = \frac{d^k E[e^{tX}]}{dt^k}\Big|_{t=0}$$

- برای محاسبه بسیاری از متغیرهای تصادفی محاسبه امید ریاضی و وارایانس از تابع مولد گشتاور استفاده می شود.

مثال

- تابع مولد گشتاور را برای متغیر تصادفی حاصل از پرتاب تاس را به دست آورید و با استفاده از آن امید ریاضی و واریانس محاسبه کنید.

مثال

- تابع مولد گشتاور را برای متغیر تصادفی حاصل از پرتاب تاس را به دست آورید و با استفاده از آن امید ریاضی و واریانس محاسبه کنید.
- حل:

$$E[e^{tX}] = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} e^{ti} = \frac{1}{6}(e^{t} + e^{2t} + \ldots + e^{6t})$$

$$E[X] = \frac{d\,\frac{1}{6}(e^{t} + e^{2t} + \ldots + e^{6t})}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{1}{6}(e^{t} + 2e^{2t} + \ldots + 6e^{6t})\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{6}(1 + 2 + \ldots + 6) = 3.5$$

مثال

- تابع مولد گشتاور را برای متغیر تصادفی حاصل از پرتاب تاس را به دست آورید و با استفاده از آن امید ریاضی و وراریانس محاسبه کنید.
- حل:

$$E[e^{tX}] = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} e^{ti} = \frac{1}{6}(e^{t} + e^{2t} + \ldots + e^{6t})$$

$$E[X] = \frac{d\,\frac{1}{6}(e^{t} + e^{2t} + \ldots + e^{6t})}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{1}{6}(e^{t} + 2e^{2t} + \ldots + 6e^{6t})\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{6}(1 + 2 + \ldots + 6) = 3.5$$

- محاسبه واریانس

$$E[X^2] = \frac{d^2\,\frac{1}{6}(e^{t} + e^{2t} + \ldots + e^{6t})}{dt^2}\Big|_{t=0} = \frac{1}{6}(e^{t} + 4e^{2t} + \ldots + 36e^{6t})\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{6}(1 + 4 + \ldots + 36) = \frac{91}{6}$$

$$Var(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

متغیرهای تصادفی مهم

- متغیر تصادفی برنولی
- متغیر تصادفی دو جمله ای
- متغیر تصادفی پواسون
- متغیر تصادفی فوق هندسی
- متغیر تصادفی دو جمله ای منفی
- ...

متغیر تصادفی برنولی

فرض کنید آزمایشی انجام گیرد که نتیجه آن را بتوان به یکی از دو حالت موفقیت و شکست تقسیم‌بندی نمود. وقتی که موفقیت حاصل می‌شود متغیر تصادفی برابر ۱ و وقتی شکست حاصل می‌شود آن را برابر صفر قرار می‌دهیم. به این متغیر تصادفی یک متغیر تصادفی برنولی[۵] می‌گویند (به یاد یکی از برنولی‌ها به‌نام جیمز برنولی).

توزیع برنولی با پارامتر p با تابع جرم احتمال زیر تعریف می شود:

$$p_X(0) = \Pr[X = 0] = 1 - p$$

$$p_X(1) = \Pr[X = 1] = p$$

متغیر تصادفی برنولی

فرض کنید آزمایشی انجام گیرد که نتیجه آن را بتوان به یکی از دو حالت موفقیت و شکست تقسیم‌بندی نمود. وقتی که موفقیت حاصل می‌شود متغیر تصادفی برابر ۱ و وقتی شکست حاصل می‌شود آن را برابر صفر قرار می‌دهیم. به این متغیر تصادفی یک متغیر تصادفی برنولی[۵] می‌گویند (به یاد یکی از برنولی‌ها به‌نام جیمز برنولی).

توزیع برنولی با پارامتر p با تابع جرم احتمال زیر تعریف می شود:

$$p_X(۰) = \Pr[X = ۰] = ۱ - p$$

$$p_X(۱) = \Pr[X = ۱] = p$$

امید ریاضی و واریانس

$$\left.\begin{aligned} E[X] &= 0*(1-p)+1*p = p \\ E[X^2] &= 0^2*(1-p)+1^2*p = p \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow Var(X) = E[X^2]-(E[X])^2 = p-p^2 = p(1-p)$$

متغیر تصادفی دو جمله ای

فرض کنید n آزمایش مستقل که هر کدام با احتمال p به موفقیت و با احتمال $1-p$ به شکست منجر می‌شوند را انجام داده و X نشان دهنده تعداد موفقیت‌ها در n آزمایش در نظر گرفته شود. آنگاه X را یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای[6] با پارامتر (n, p) گویند. بنابراین متغیر تصادفی برنولی همان متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای $(1, p)$ است. تابع جرم احتمال یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای (n, p) به صورت زیر است:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$k = 1, 2, .., n$$

متغیر تصادفی دو جمله ای

فرض کنید n آزمایش مستقل که هر کدام با احتمال p به موفقیت و با احتمال $1-p$ به شکست منجر می‌شوند را انجام داده و X نشان دهنده تعداد موفقیت‌ها در n آزمایش در نظر گرفته شود. آنگاه X را یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای[۶] با پارامتر (n,p) گویند. بنابراین متغیر تصادفی برنولی همان متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای $(1,p)$ است. تابع جرم احتمال یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای (n,p) به صورت زیر است:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$k = 1, 2, .., n$$

- **برای محاسبه امید ریاضی و واریانس از تابع مولد گشتاور استفاده می کنیم:**
- یاد آوری

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

- محاسبه تابع مولد گشتاور

$$E[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^t p)^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= (e^t p + 1 - p)^n$$

محاسبه امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی دو جمله ای

- امید ریاضی

$$E[X]=\frac{dE[e^{tX}]}{dt}|_{t=0}=\frac{d(e^t p+1-p)^n}{dt}|_{t=0}=n(pe^t)(e^t p+1-p)^{n-1}|_{t=0}=np$$

- گشتاور دوم

$$E[X^2]=\frac{d^2E[e^{tX}]}{dt^2}|_{t=0}=\frac{d(n(pe^t)(e^t p+1-p)^{n-1})}{dt}|_{t=0}$$

$$=\{n(pe^t)(e^t p+1-p)^{n-1}+n(n-1)(pe^t)^2(e^t p+1-p)^{n-2}|_{t=0}=np+n(n-1)p^2$$

- محاسبه واریانس

$$Var(X)=E[X^2]-(E[X])^2=np+n(n-1)p^2-n^2p^2=np-np^2=np(1-p)$$

- دو نکته
  - بیشترین مقدار احتمال برای نقطه صحیحی است که نزدیکترین مقدار به np را دارد.
  - محاسبات برای n های بزرگ نسبتا پیچیده است

- تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی دو جمله ای

$$F_X(a) = P\{X \le a\} = \sum_{t \le a} P(X = t) =$$

$$= \begin{cases} 0 & a < 0 \\ \sum_{t=0}^{\lfloor a \rfloor} P\{X = t\} & 0 \le a < n \\ 1 & a \le n \end{cases}$$

- متغیر تصادفی دو جمله ای مهمترین تابع توزیع احتمال است

مثال

- هیات منصفه یک دادگاه راشامل ۱۲ نفر در نظر بگیرید. شخص متهم به شرطی مجرم شناخته می شود که حداقل ۸ نفر از اعضای هیات منصفه به مجرم بودن او رای دهند. اگر اعضای هیات منصفه مستقل از هم با احتمال θ رای صحیح دهند
- الف) با چه احتمالی فرد مجرم را صحیح تشخیص می دهند.
- ب) با چه احتمالی فرد غیر مجرم را صحیح تشخیص می دهند.

مثال

- هیات منصفه یک دادگاه راشامل ۱۲ نفر در نظر بگیرید. شخص متهم به شرطی مجرم شناخته می شود که حداقل ۸ نفر از اعضای هیات منصفه به مجرم بودن او رای دهند. اگر اعضای هیات منصفه مستقل از هم با احتمال θ رای صحیح دهند
- الف) با چه احتمالی فرد مجرم را صحیح تشخیص می دهند.
- ب) با چه احتمالی فرد غیر مجرم را صحیح تشخیص می دهند.
- حل
- الف) باید حداقل ۸ نفر از هیات منصفه درست تشخیص دهند

$$P\{X \geq 8\} = \sum_{t=8}^{12} \binom{12}{i} \theta^{i} (1-\theta)^{12-i}$$

مثال

- هیات منصفه یک دادگاه راشامل ۱۲ نفر در نظر بگیرید. شخص متهم به شرطی مجرم شناخته می شود که حداقل ۸ نفر از اعضای هیات منصفه به مجرم بودن او رای دهند. اگر اعضای هیات منصفه مستقل از هم با احتمال θ رای صحیح دهند
- الف) با چه احتمالی فرد مجرم را صحیح تشخیص می دهند.
- ب) با چه احتمالی فرد غیر مجرم را صحیح تشخیص می دهند.
- حل
- الف) باید حداقل ۸ نفر از هیات منصفه درست تشخیص دهند

$$P\{X \geq 8\} = \sum_{t=8}^{12} \binom{12}{i} \theta^i (1-\theta)^{12-i}$$

- ب) باید حداقل ۵ نفر از هیات منصفه درست تشخیص دهند (زیرا اگر ۷ نفر هم اشتباه تشخیص دهند مشکلی نیست)

$$P\{X \geq 5\} = \sum_{t=5}^{12} \binom{12}{i} \theta^i (1-\theta)^{12-i}$$

متغیر تصادفی پواسون

- متغیر تصادفی X که همه مقادیر صحیح نامنفی (۰، ۱،۲و ...) را انتخاب می کند را متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ گوییم هرگاه تابع احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$P\{X = i\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda!}{i!},\ i = 0,1,2,\ldots$$

- دقت کنید مجموع احتمال باید ۱ است.

متغیر تصادفی پواسون

- متغیر تصادفی X که همه مقادیر صحیح نامنفی (۰، ۲،۱و ...) را انتخاب می کند را متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ گوییم هرگاه تابع احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$P\{X = i\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda!}{i!},\ i = 0,1,2,\ldots$$

- دقت کنید مجموع احتمال باید ۱ است.
- محاسبه تابع مولد گشتاور

$$E[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{e^t \lambda}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

محاسبه امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی پواسون

- امید ریاضی

$$E[X]=\frac{dE[e^{tX}]}{dt}\Big|_{t=0}=\frac{d(e^{-\lambda}e^{\lambda e^t})}{dt}\Big|_{t=0}=e^{-\lambda}\lambda e^t e^{\lambda e^t}\Big|_{t=0}=\lambda$$

- گشتاور دوم

$$E[X^2]=\frac{d^2E[e^{tX}]}{dt^2}\Big|_{t=0}=\frac{d(e^{-\lambda}\lambda e^t e^{\lambda e^t})}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$=\{e^{-\lambda}\lambda e^t e^{\lambda e^t}+e^{-\lambda}(\lambda e^t)^2 e^{\lambda e^t}\}\Big|_{t=0}=\lambda+\lambda^2$$

- محاسبه واریانس

$$Var(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\lambda+\lambda^2-\lambda^2=\lambda$$

مثال

- فرض کنید تعداد غلطهای تایپی در یک صفحه از کتاب یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\lambda = \frac{1}{2}$ باشد احتمال آنکه در این صفحه حداقل دو خطا باشد چقدر است؟

مثال

- فرض کنید تعداد غلطهای تایپی در یک صفحه از کتاب یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\lambda = \frac{1}{2}$ باشد احتمال آنکه در این صفحه حداقل دو خطا باشد چقدر است؟

- **حل:**

$$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X < 2\} = 1 - (P\{X = 0\} + P\{X = 2\})$$

$$= 1 - \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} - \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} = 1 - e^{\frac{-1}{2}}(1 + \frac{1}{2})$$

$$= 1 - \frac{3}{2}e^{\frac{-1}{2}}$$

رابطه متغیر تصادفی پواسون و دو جمله ای

- هرگاه در متغیر تصادفی دوجمله ای n عدد بزرگ و p عدد کوچکی باشد می توان آن را با متغیر تصادفی پواسون تقریب زد ($\lambda=np$):

- چند مثال
  - تعداد غلط های تایپی در یک صفحه
  - افرادی که در یک کشور بیشتر از ۱۰۰ سال دارند
  - تعداد زلزله ها در یک شهر
  - تعداد تلفن های اشتباه

- دقت کنید وقتی p کوچک باشد $Var(X)=np(1-p)\approx np$

مثال

- فرض کنید احتمال آنکه یک قطعه تولید شده در یک دستگاه معیوب باشد برابر ۰,۱ است. احتمال آنکه در یک نمونه ۱۰ تایی حداکثر شامل یک قطعه معیوب باشد چقدر است؟
-

مثال

- فرض کنید احتمال آنکه یک قطعه تولید شده در یک دستگاه معیوب باشد برابر ۰,۱ است. احتمال آنکه در یک نمونه ۱۰ تایی حداکثر شامل یک قطعه معیوب باشد چقدر است؟
- حل:
- راه حل اول استفاده از متغیر تصادفی دو جمله

$$P\{X \le 1\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \binom{10}{0}(0.9)^{10} + \binom{10}{1}(0.9)^{9}(0.1) = 0.736$$

-

مثال

- فرض کنید احتمال آنکه یک قطعه تولید شده در یک دستگاه معیوب باشد برابر ۰,۱ است. احتمال آنکه در یک نمونه ۱۰ تایی حداکثر شامل یک قطعه معیوب باشد جقدر است؟
- حل:
- راه حل اول استفاده از متغیر تصادفی دو جمله

$$P\{X \le 1\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \binom{10}{0}(0.9)^{10} + \binom{10}{1}(0.9)^{9}(0.1) = 0.736$$

- راه حل دوم تقریب با پواسون
-

$$\lambda = np = 10 * 0.1 = 1$$

$$P\{X \le 1\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \frac{e^{-1} * 1^{0}}{0!} + \frac{e^{-1} * 1^{0}}{1!} = 0.7358$$

ویژگی متغیر تصادفی پواسون

- اگر در یک فرآیند پواسون λ بر اساس اتفاقات بر واحدی (مانند زمان) باشد با تغییر واحد می توان به یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ' جدید رسید
- مثال:
- ۱ غلط در یک صفحه $\rightarrow$ ۲ غلط در دو صفحه
- ۱ ورود در دقیقه $\rightarrow$ ۶۰ ورود در یک ساعت
- **مثال**: فرض کنید نرخ وقوع زلزله در یکی از شهرهای ژاپن یک متغیر تصادفی پواسون با میانگین ۲ زلزله در سال است. احتما آنکه در دو سال آینده ۳ زلزله اتفاق افتد چقدر است>

ویژگی متغیر تصادفی پواسون

- اگر در یک فرآیند پواسون λ بر اساس اتفاقات بر واحدی (مانند زمان) باشد با تغییر واحد می توان به یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ' جدید رسید
- مثال:
- ۱ غلط در یک صفحه $\rightarrow$ ۲ غلط در دو صفحه
- ۱ ورود در دقیقه $\rightarrow$ ۶۰ ورود در یک ساعت
- مثال: فرض کنید نرخ وقوع زلزله در یکی از شهرهای ژاپن یک متغیر تصادفی پواسون با میانگین ۲ زلزله در سال است. احتما آنکه در دو سال آینده ۳ زلزله اتفاق افتد چقدر است>
- حل: $\lambda=2$ در سال نتیجه می دهد $\lambda'=4$ در دوسال

$$P\{X=3\}=\frac{e^{-4}*4^{3}}{3!}$$

سپاس